

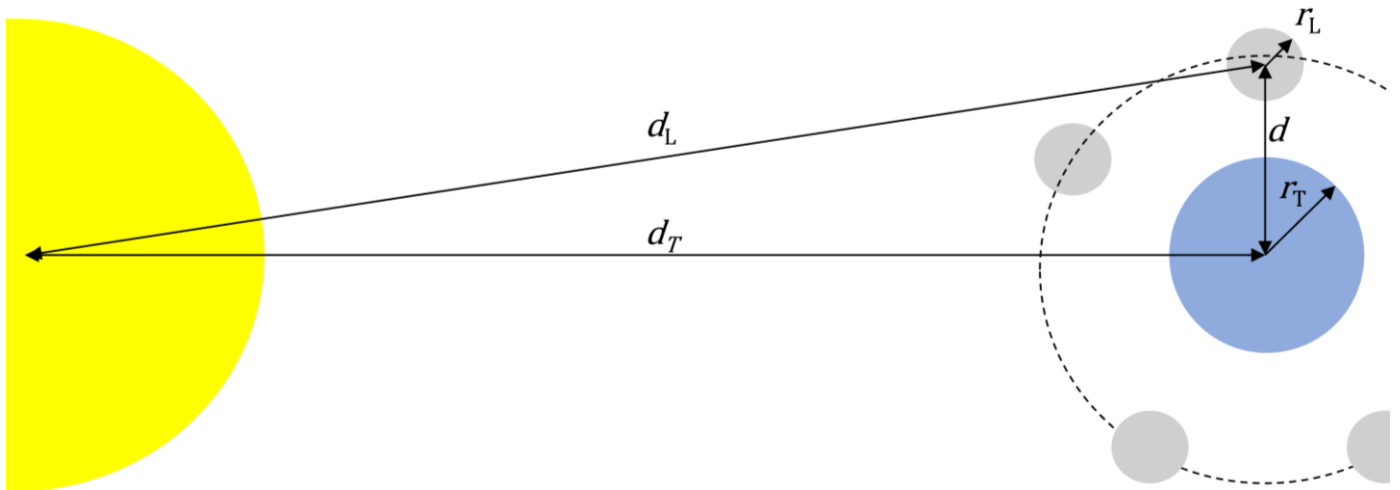
Notas

V4 – correção de algumas gralhas e agora todas as perguntas do enunciado têm aqui as resoluções completas.

Por vezes o albedo é descrito com o símbolo  $\alpha$  e por outra vezes com o símbolo  $A$ . Pode gerar confusão, porque o símbolo para absorptância normalmente é o  $\alpha$  também.

1

Assumir que estamos a falar da superfície da Lua que está virada para o Sol (a Lua gira sobre si própria em relação ao Sol uma vez por mês).



Como o raio da órbita da Lua à volta da terra ( $d$ ) é uma distância muito menor que a órbita da Terra à volta do Sol ( $d_T$ ), a distância que a Lua está do sol  $d_L$  é igual ao valor da órbita da Terra.

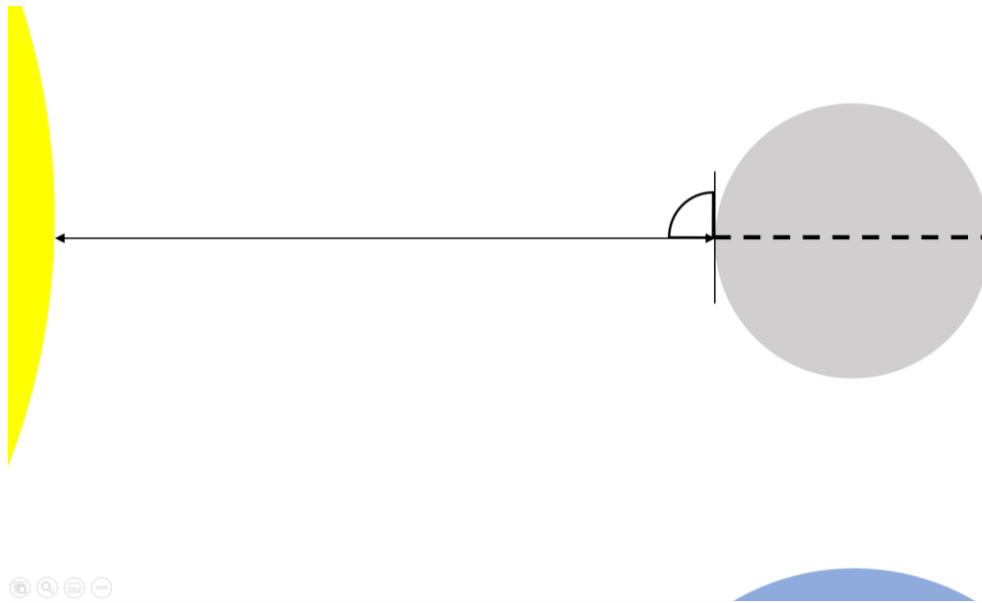
$$d_T \gg d$$
$$\therefore d_T = d_L$$

A esta distância sabemos que a radiação solar interplanetária tem um valor de:

$$S_0 = 1366 \text{ W/m}^2$$

Este é o valor de radiação que consideram que chega ao topo da atmosfera da Terra. Ou seja, este é o valor da radiação que chega à Lua.

Na pergunta não está definida o ângulo de incidência da radiação sobre o solo da Lua em questão. Como tal, vamos assumir que estamos no equador da Lua, ou seja, o ângulo de incidência da radiação solar é perpendicular.



Sabendo o valor da radiação solar interplanetária na órbita da Terra e Lua, e assumindo que estamos no equador da Lua, e sabendo que a Lua não tem atmosfera, podemos concluir que a radiação incidente na superfície da Lua é de:

$$S_0 = 1366 \text{ W/m}^2 = G.$$

Para obter a temperatura de emissão, precisamos de saber qual a potência de emissão da superfície da Lua. Temos de assumir que a superfície da Lua em questão está em equilíbrio térmico, ou seja, não está a mudar de temperatura, ou seja a toda a potência absorvida ( $G_{\text{abs}}$ ) é igual à potência emitida ( $E_L$ ).

$$G_{\text{abs}} = E_L$$

Tendo o albedo da superfície da Lua,  $A = 0.12$  podemos calcular radiação absorvida.

$$\begin{aligned} G_{\text{abs}} &= G(1 - A) \\ &= 1366 \text{ W/m}^2 \times (1 - 0.12) \\ G_{\text{abs}} &= 1202 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

Ou seja, a potência de emissão da superfície da Lua é:

$$\begin{aligned} G_{\text{abs}} &= E_L \\ G_{\text{abs}} &= 1202 \text{ W/m}^2 \\ \therefore E_L &= 1202 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

Assumindo que a emissividade da superfície da Lua é similar ao seu albedo, podemos calcular a temperatura de emissão a partir da equação de Stefan-Boltzmann.

Começamos com a equação Stefan-Boltzmann e aplicamos a relação de albedo e emissividade:

$$\begin{aligned} E &= \varepsilon \sigma T^4 \\ \varepsilon &= 1 - A \end{aligned}$$

$$E = (1 - A) \sigma T^4$$

Sabendo que potência de emissão tem de ser igual à potência absorvida, e assim utilizando a expressão para a potência absorvida, temos uma expressão para a potência de emissão em função da potência incidente e o albedo:

$$G_{\text{abs}} = E_L$$

$$G_{\text{abs}} = G(1 - A)$$

$$E_L = G(1 - A)$$

Como já temos duas expressões para a potência de emissão, podemos calcular:

$$E = (1 - A)\sigma T^4$$

$$E_L = G(1 - A)$$

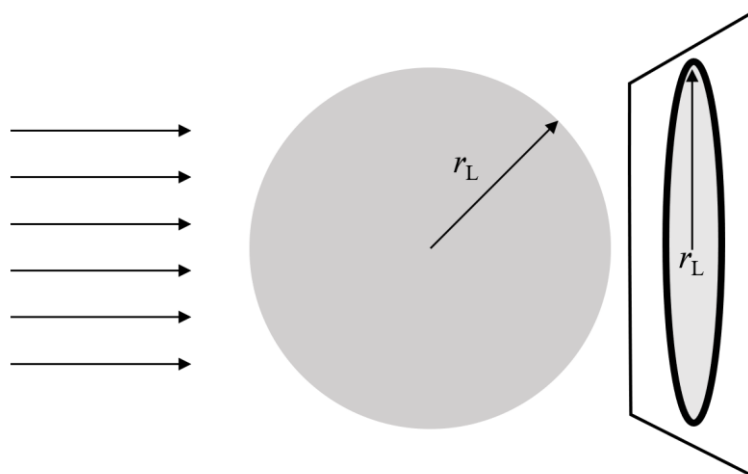
$$\cancel{(1 - A)}\sigma T^4 = G\cancel{(1 - A)}$$

$$\sigma T^4 = G$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{G}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1366 \text{ Wm}^{-2}}{5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}}} = 394 \text{ K} = 121^\circ \text{ C}$$

Está é a temperatura máxima que a superfície da Lua chega em zonas do equador que estejam viradas para o Sol.

Para os alunos que estiveram atentos às aulas, vão perceber que o que pergunta efectivamente pede é *temperatura de emissão* da lua. Primeiro temos de perceber qual é a potência total absorvida pela Lua. Já sabemos qual o fluxo de radiação solar interplanetário. A esfera da Lua projecta uma sombra em disco, e é este disco que nos indica qual o total da potência de radiação que incidente na superfície da Lua.



A área do disco de sombra projectada pela Lua é:

$$a_p = \pi r_L^2$$

$$r_L = 1737 \text{ km} = 1.737 \times 10^6 \text{ m}$$

$$a_p = \pi (1.737 \times 10^6 \text{ m})^2 = 5.9 \times 10^{12} \text{ m}^2$$

Ou seja, a potência absorvida pela Lua é definida pela área do disco e a potência de radiação incidente:

$$\begin{aligned}P_{\text{abs}} &= a_p S_0 (1 - A) \\&= 5.9 \times 10^{12} \text{ m}^2 \times 1366 \text{ W/m}^2 (1 - 0.12) \\&= 7.1 \times 10^{15} \text{ W}\end{aligned}$$

A temperatura de emissão é definida como a temperatura que a superfície teria se fosse um corpo negro (ver aulas teóricas). Ou seja, para calcular a temperatura de emissão, a emissividade da superfície não é tida em conta, assume-se que tem o valor de 1.

A Lua está em equilíbrio térmico, não está a aquecer nem a arrefecer. Portanto, a potência ( $P_e$ ) de emissão terá de ser igual à potência absorvida ( $P_{\text{abs}}$ ).

No entanto, o tamanho da superfície emissora é a da esfera da Lua, ou seja, a área de emissão é:

$$\begin{aligned}a_e &= 4\pi r_L^2 \\r_L &= 1737 \text{ km} = 1.737 \times 10^6 \text{ m} \\a_e &= 4\pi (1.737 \times 10^6 \text{ m})^2 = 2.36 \times 10^{13} \text{ m}^2\end{aligned}$$

A potência de emissão da Lua ( $P_e$ ) é em função da densidade de potência de emissão ( $E_L$ ) e a sua área total:

$$\begin{aligned}P_e &= a_L E_L \\E_L &= \varepsilon \sigma T_e^4\end{aligned}$$

$$\therefore P_e = a_L \sigma T_e^4$$

Já temos duas expressões para a potência de emissão da Lua, podemos calcular a temperatura de emissão:

$$\begin{aligned}P_e &= a_L \sigma T_e^4 \\P_e &= P_{\text{abs}} \\P_{\text{abs}} &= a_p S_0 (1 - A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore P_e &= a_p S_0 (1 - A) \\ \therefore a_L \sigma T_e^4 &= a_p S_0 (1 - A)\end{aligned}$$

$$T_e = \frac{a_p S_0 (1 - A)}{a_L \sigma}$$

$$\begin{aligned}a_p &= \pi r_L^2 \\a_L &= 4\pi r_L^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore T_e &= \sqrt[4]{\frac{\cancel{\pi r_L^2} S_0 (1 - A)}{4 \cancel{\pi r_L^2} \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{S_0 (1 - A)}{4\sigma}} \\&= \sqrt[4]{\frac{1366 \text{ W/m}^2 (1 - 0.12)}{4 \times 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}}} = 270 \text{ K}\end{aligned}$$

2

Antes de abordar a pergunta, vamos demonstrar como se pode calcular a potência da radiação solar que chega à Terra.

Sabendo que a temperatura da superfície do Sol é de 5800 K (já devem saber como sabemos este facto), podemos calcular a potência de emissão do Sol.

Primeiro a densidade de potência de emissão do Sol:

$$P_S = \sigma T_S^4$$

$$T_S = 5800\text{K}$$

$$\begin{aligned} \therefore P_S &= 5.67 \times 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4} \times (5800\text{K})^4 \\ &= 6.42 \times 10^8 \text{Wm}^{-2} \end{aligned}$$

Podemos agora obter a potência de emissão do Sol, sabendo o seu raio e assim a sua área superficial:

$$a_S = 4\pi r_S^2$$

$$r_S = 696,000\text{km} = 6.96 \times 10^8 \text{m}$$

$$\therefore a_S = 6.09 \times 10^{18} \text{m}^2$$

$$P_{S,\text{tot}} = a_S P_S$$

$$P_S = 6.42 \times 10^8 \text{Wm}^{-2}$$

$$\begin{aligned} \therefore P_{S,\text{tot}} &= 6.09 \times 10^{18} \text{m}^2 \times 6.42 \times 10^8 \text{Wm}^{-2} \\ &= 3.91 \times 10^{26} \text{W} \end{aligned}$$

À distância que a Terra está do Sol, o Sol pode ser considerado como fonte pontual. Ou seja, a potência interceptada por uma superfície a uma distância  $r$ , decai inversamente com o quadrado da distância. No entanto, isto é verdade porque toda a potência de radiação emitida pelo Sol tem de atravessar a superfície de uma esfera definida por um raio. Quanto maior o raio, maior a área superficial da esfera, e assim maior a diluição da potência  $S$  nessa superfície que tem um raio  $d$  (distância entre o Sol e a superfície da esfera).

$$S = \frac{P_{S,\text{tot}}}{4\pi d^2}$$

Para a Terra:

$$d_{\text{Earth}} = 1.50 \times 10^{11} \text{m}$$

$$S_{\text{Earth}} = \frac{P_{S,\text{tot}}}{4\pi d_{\text{Earth}}^2}$$

$$P_{S,\text{tot}} = 3.91 \times 10^{26} \text{W}$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{\text{Earth}} &= \frac{3.91 \times 10^{26} \text{W}}{4\pi(1.50 \times 10^{11} \text{m})^2} \\ &= 1380 \text{Wm}^{-2}\end{aligned}$$

Tendo em consideração erros de arredondamento, estamos muito próximos da constante solar de  $1366 \text{ Wm}^{-2}$ , com um erro de 1%.

Vamos agora seguir o raciocínio sem valores, para ver a expressão que obtemos no fim.

$$P_s = \sigma T_s^4$$

$$P_{s,\text{tot}} = a_s P_s$$

$$a_s = 4\pi r_s^2$$

$$\therefore P_{s,\text{tot}} = 4\pi r_s^2 \sigma T_s^4$$

$$S = \frac{P_{s,\text{tot}}}{4\pi d^2}$$

$$\therefore S = \frac{r_s^2 \sigma T_s^4}{d^2}$$

E agora com valores:

$$\begin{aligned}r_s &= 6.96 \times 10^8 \text{m} \\ T_s &= 5800 \text{K} \\ d_{\text{Earth}} &= 1.50 \times 10^{11} \text{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{\text{Earth}} &= \frac{(6.96 \times 10^8 \text{m})^2 5.67 \times 10^{-8} \text{Wm}^{-2} \text{K}^{-4} \times (5800 \text{K})^4}{(1.50 \times 10^{11} \text{m})^2} \\ &= 1380 \text{Wm}^{-2}\end{aligned}$$

No caso da Terra, e assumindo que não tem atmosfera, podemos calcular a temperatura de emissão, seguindo o mesmo raciocínio similar da pergunta 1. A Terra tem um albedo de  $A_{\text{Earth}} = 0.3$ .

A Terra está em equilíbrio térmico, portanto a potência absorvida pela superfície tem de ser igual à potência emitida pela Terra.

$$P_e = P_{\text{abs}}$$

$$P_e = \sigma T_e^4$$

$$P_{\text{abs}} = S(1 - A)$$

No entanto, a Terra não é um disco, mas sim uma esfera. Ou seja, a potência absorvida é equivalente de um disco com o mesmo diâmetro que a esfera, mas a potência emitida é da área da esfera. Ou seja, sabendo que o rácio entre a área superficial de um disco e de uma esfera é de  $\frac{1}{4}$ , a potência absorvida é  $\frac{1}{4}$  e, portanto, temos de reescrever a expressão de cima tomando isto em conta.

$$P_e = P_{\text{abs}}$$

$$P_e = \sigma T_e^4$$

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{4} S (1 - A)$$

Como já temos uma expressão para a densidade de potência de radiação a uma distância  $d$  do Sol

$$S = \frac{r_s^2 \sigma T_s^4}{d^2}$$

A potência absorvida é:

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{4} S (1 - A)$$

$$S = \frac{r_s^2 \sigma T_s^4}{d^2}$$

$$\therefore S = \frac{1}{4} (1 - A) \frac{r_s^2 \sigma T_s^4}{d^2}$$

Podemos igualar as expressões equivalentes:

$$P_e = P_{\text{abs}}$$

$$P_e = \sigma T_e^4$$

$$P_{\text{abs}} = S = \frac{1}{4} (1 - A) \frac{r_s^2 \sigma T_s^4}{d^2}$$

$$\therefore \cancel{\sigma} T_e^4 = \frac{1}{4} (1 - A) \frac{r_s^2 \cancel{\sigma} T_s^4}{d^2}$$

$$T_e^4 = \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{d^2} (1 - A) T_s^4$$

$$T_e = T_s \sqrt{\frac{1}{2} \frac{r_s}{d}} \sqrt[4]{(1 - A)}$$

Esta expressão permite calcular a temperatura de emissão de um planeta, assumindo que este não tem atmosfera que absorva radiação incidente e/ou reflita ou absorba radiação emitida pela superfície.

Utilizando os valores tabulados podemos calcular a temperatura de emissão para todos os planetas na tabela:



	Jupiter	Venus	Mars	Earth
raio do Sol				
Distância ao Sol	$7.80 \times 10^{11}$ m	$1.08 \times 10^{11}$ m	$2.28 \times 10^{11}$ m	$1.50 \times 10^{11}$ m
albedo	0.73	0.75	0.15	0.30
$T_c$	88	233	217	256
Medido $T_c$	130	700	220	288

A temperatura medida de Júpiter é superior à sua temperatura estimada. Para Vénus é bastante superior. Para Marte a diferença é nula. Para a Terra a medida é superior.

A origem da temperatura superior para Júpiter é outra.

Vénus tem uma atmosfera muito densa composta maioritariamente por CO<sub>2</sub>. Portanto, o efeito de estufa é bastante forte.

Marte quase não tem atmosfera, mas a que tem é composta de CO<sub>2</sub>. No entanto, não é o suficiente para causar um efeito de estufa relevante.

A Terra, explicado nas aulas T.

3

Começar com o sistema de equações em forma de matrizes dada nas T.

$$\begin{bmatrix} -1 & \varepsilon_1 & (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & 2\varepsilon_1 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & -2\varepsilon_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_s^4 \\ T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{bmatrix} H_s - \frac{S_0}{4}(1-\alpha) \\ H_L - H_s \\ -H_L \end{bmatrix}$$

De modo a simplificar, utilizamos a mesma notação que nas aulas T.

Superfície, S; camada de nuvens, 1, camada de aerossóis, 2.

Queremos encontrar o albedo  $\alpha$ . Vemos que do sistema de equações podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} -1 & \varepsilon_1 & (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & 2\varepsilon_1 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & -2\varepsilon_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_s^4 \\ T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{bmatrix} H_s - \frac{S_0}{4}(1-\alpha) \\ H_L - H_s \\ -H_L \end{bmatrix}$$

De seguida percebemos que temos só uma equação que contem o albedo:

$$(-1, \varepsilon_1, (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2) \cdot (T_s^4, T_1^4, T_2^4) = \frac{1}{\sigma} \left( H_s - \frac{S_0}{4}(1-\alpha) \right)$$

Ou seja:

$$-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 T_2^4 = \frac{1}{\sigma} \left( H_s - \frac{S_0}{4}(1-\alpha) \right)$$

Agora é só uma questão de “dar à manivela”:

$$\begin{aligned} -T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 T_2^4 &= \frac{1}{\sigma} \left( H_s - \frac{S_0}{4}(1-\alpha) \right) \\ \sigma(-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 T_2^4) &= H_s - \frac{S_0}{4}(1-\alpha) \\ \sigma(-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 T_2^4) - H_s &= -\frac{S_0}{4}(1-\alpha) \\ H_s - \sigma(-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 T_2^4) &= \frac{S_0}{4}(1-\alpha) \\ \frac{4}{S_0} [H_s - \sigma(-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 T_2^4)] &= 1-\alpha \\ \alpha &= 1 - \frac{4}{S_0} [H_s - \sigma(-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 T_2^4)] \end{aligned}$$

Aplicamos a condição dos albedos:

$$\alpha = 1 - \frac{4}{S_0} \left[ H_s - \sigma (-T_s^4 + \epsilon_1 T_1^4 + \epsilon_2 T_2^4 - \epsilon_1 \epsilon_2 T_2^4) \right]$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \alpha_1 = 1 - \rho_1 = 1 - A_1 \\ \epsilon_2 &= \alpha_2 = 1 - \rho_2 = 1 - A_2 \\ A_1 &\gg A_2 \\ \epsilon_2 &\gg \epsilon_1 \\ 0 &< \epsilon < 1 \end{aligned}$$

$$\epsilon_1 \epsilon_2 T_2^4 \ll \epsilon_2 T_2^4$$

$$\alpha = 1 - \frac{4}{S_0} \left[ H_s - \sigma (-T_s^4 + \epsilon_1 T_1^4 + \epsilon_2 T_2^4) \right]$$

$$\alpha = 1 - \frac{4}{S_0} \left[ H_s - \sigma (-T_s^4 + (1 - A_1) T_1^4 + (1 - A_2) T_2^4) \right]$$

Como não temos informação de como as temperaturas se comparam,  $T_1 \ll T_2$  não podemos simplificar mais.

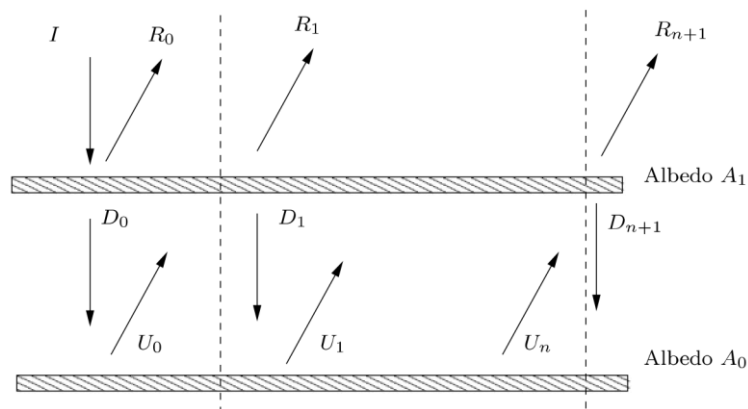
---

Podemos analisar a pergunta a partir de outro ponto de vista, utilizando a ideia de múltiplas reflexões. Aqui vamos utilizar a mesma notação encontrada no enunciado. Veremos que isto facilita na elaboração das equações: camada de nuvens, 0, camada de aerossóis, 1.

Temos:

- radiação  $I$  incidente sobre a atmosfera;
- $R$  é a radiação que é reflectida de volta ao espaço;
- $D$  é a radiação que transmitida através da primeira camada aerossóis (camada 1) para a camada de nuvens (camada 0); e,
- $U$  é a radiação que é reflectida a partir da camada de nuvens de volta para a camada de aerossóis.
- $n$  indica número reflexões a partir da camada de nuvens sofridas pela radiação.

Ou seja, visualizando esta construção na figura abaixo:



$R_0$  é radiação que é reflectida pela primeira camada, ou seja, esta radiação nunca atravessou a camada de aerossóis, simplesmente sofreu uma primeira reflexão.

$D_0$  é primeira radiação que é transmitida através da camada 1. Assumindo que não existe absorção de radiação, temos:

$$D_0 + R_0 = I$$

Tendo em conta os albedos, a primeira reflexão é:

$$R_0 = A_1 I$$

Como  $A_0 \gg A_1$  podemos negligenciar esta primeira reflexão.

E a primeira radiação transmitida através a camada de aerossóis (camada 1) é:

$$D_0 = (1 - A_1) I$$

E a primeira radiação reflectida a partir da camada de nuvens é, portanto:

$$\begin{aligned} U_0 &= A_0 D_0 \\ \therefore D_0 &= (1 - A_1) I \end{aligned}$$

$$U_0 = A_0 (1 - A_1) I$$

A radiação  $U_0$  que volta para a camada de aerossóis, parte dela vai ser reflectida de volta para a camada de nuvens:

$$\begin{aligned} D_1 &= A_1 U_0 \\ \therefore U_0 &= A_0 (1 - A_1) I \end{aligned}$$

$$D_1 = A_1 A_0 (1 - A_1) I$$

A outra parte desta radiação atravessa a camada de aerossóis de volta para espaço:

$$\begin{aligned} R_1 &= (1 - A_1) U_0 \\ \therefore U_0 &= A_0 (1 - A_1) I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= (1 - A_1) A_0 (1 - A_1) I \\ &= A_0 (1 - A_1)^2 I \end{aligned}$$

A radiação  $D_1$  que volta de novo para a camada de nuvens sofre novamente uma reflexão:

$$\begin{aligned} U_1 &= A_0 D_1 \\ \therefore D_1 &= A_1 U_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1 &= A_0 A_1 U_0 \\ \therefore U_0 &= A_0 D_0 \end{aligned}$$

$$U_1 = A_0 A_1 A_0 D_0$$

Para melhor compreender o processo iterativo, construímos uma tabela e vamos até  $n = 2$ :

n	$D_n$	$U_n$	$R_n$
0	$D_0 = (1 - A_1)I$	$U_0 = A_0(1 - A_1)I$	$R_0 = A_1I$
1	$D_1 = A_1U_0$ $\because U_0 = A_0(1 - A_1)I$ $D_1 = A_1A_0(1 - A_1)I$	$U_1 = A_0D_1$ $\because D_1 = A_1U_0$ $U_1 = A_0A_1U_0$ $\because U_0 = A_0(1 - A_1)I$ $U_1 = A_0A_1A_0(1 - A_1)I$	$R_1 = (1 - A_1)U_0$ $\because U_0 = A_0(1 - A_1)I$ $R_1 = (1 - A_1)A_0(1 - A_1)I$ $R_1 = A_0(1 - A_1)^2 I$
2	$D_2 = A_1U_1$ $\because U_1 = A_0A_1A_0(1 - A_1)I$ $D_2 = A_1A_0A_1A_0(1 - A_1)I$ $D_2 = (A_1A_0)^2 (1 - A_1)I$	$U_2 = A_0D_2$ $\because D_2 = A_1U_1$ $U_2 = A_0A_1U_1$ $\because U_1 = A_0D_1$ $U_2 = A_0A_1A_0D_1$ $\because D_1 = A_1A_0(1 - A_1)I$ $U_2 = A_0A_1A_0A_1A_0(1 - A_1)I$ $U_2 = A_0(A_1A_0)^2 (1 - A_1)I$	$R_2 = (1 - A_1)U_1$ $\because U_1 = A_0A_1A_0(1 - A_1)I$ $R_2 = (1 - A_1)A_0A_1A_0(1 - A_1)I$ $R_2 = A_0(1 - A_1)^2 A_1A_0I$
n	$D_0 = (1 - A_1)I$ $D_1 = A_1A_0(1 - A_1)I$ $D_2 = (A_1A_0)^2 (1 - A_1)I$  $D_n = (A_1A_0)^n (1 - A_1)I$	$U_0 = A_0(1 - A_1)I$ $U_1 = A_0A_1A_0(1 - A_1)I$ $U_2 = A_0(A_1A_0)^2 (1 - A_1)I$  $U_n = A_0(A_1A_0)^n (1 - A_1)I$	$R_0 = A_1I$ $R_1 = A_0(1 - A_1)^2 I$ $R_2 = A_0(1 - A_1)^2 A_1A_0I$  $n < 1$ $R_n = A_0(1 - A_1)^2 (A_1A_0)^{n-1} I$ $R_{n+1} = A_0(1 - A_1)^2 (A_1A_0)^n I$

Podemos agora somar todas as reflexões (que é o que necessitamos para calcular o albedo global)

$$R = \sum_0^{\infty} R_n$$

$$R = R_0 + \sum_0^{\infty} R_{n+1}$$

$$\because R_0 = A_1 I$$

$$\because R_{n+1} = A_0 (1 - A_1)^2 (A_1 A_0)^n I$$

$$\begin{aligned} R &= A_1 I + \sum_0^{\infty} A_0 (1 - A_1)^2 (A_1 A_0)^n I \\ &= \left[ A_1 + A_0 (1 - A_1)^2 \sum_0^{\infty} (A_1 A_0)^n \right] I \end{aligned}$$

Sabendo que temos uma soma do tipo:

$$\sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

Podemos escrever que:

$$\begin{aligned} R &= \left[ A_1 + A_0 (1 - A_1)^2 \sum_0^{\infty} (A_1 A_0)^n \right] I \\ \because \sum_0^{\infty} (A_1 A_0)^n &= \frac{1}{1 - A_1 A_0} \\ R &= \left[ A_1 + \frac{A_0 (1 - A_1)^2}{1 - A_1 A_0} \right] I \end{aligned}$$

Assim já temos uma expressão para o albedo global:

$$R = AI$$

$$R = \left[ A_1 + \frac{A_0 (1 - A_1)^2}{1 - A_1 A_0} \right] I$$

$$\because A = A_1 + \frac{A_0 (1 - A_1)^2}{1 - A_1 A_0}$$

## 4

### 4.1

Assumimos que a Terra está em equilíbrio térmico. Ou seja, a potência absorvida pela superfície da Terra é igual à potência emitida.

$$P_{\text{abs}} = P_e$$

A potência total absorvida por uma esfera que está a interceptar radiação paralela e uniforme é em função da área projectada pela esfera. A área projectada pela sombra da Terra é:

$$a_p = \pi r_T^2$$

A potência total de radiação total absorvida pelo planeta Terra é:

$$P_{\text{abs}} = (1 - A)S_0\pi r_T^2$$

A área superficial da Terra é:

$$a_T = 4\pi r_T^2$$

Ou seja, a potência média absorvida pela Terra é:

$$G_{\text{abs}} = \frac{P_{\text{abs}}}{a_T} = \frac{(1 - A)S_0\pi r_T^2}{4\pi r_T^2} = \frac{1}{4}(1 - A)S_0$$

A potência total de emissão radiativa da Terra é:

$$P_e = E_T \times a_T$$

Mas, como já temos a potência da radiação absorvida por unidade de área, podemos trabalhar directamente por unidade de área.

$$P_{\text{abs}} = P_e$$

$$\therefore G_{\text{abs}} = E_T$$

A densidade de potência de emissão da Terra é, portanto:

$$E_T = \sigma T_e^4$$

Aqui assumimos que a Terra emite como um corpo negro.

Podemos agora igualar as expressões para encontrar o albedo.

$$G_{\text{abs}} = E_e$$

$$G_{\text{abs}} = \frac{1}{4}(1 - A)S_0$$

$$E_T = \sigma T_e^4$$

$$\frac{1}{4}(1 - A)S_0 = \sigma T_e^4$$

Podemos agora colocar a expressão à ordem da temperatura de emissão:

$$T_e = \sqrt[4]{\frac{1(1-A)S_0}{4\sigma}}$$

Como a pergunta não define a intensidade da radiação incidente (embora deverão saber), é possível resolver a pergunta sem esta informação.

Para a temperatura de emissão de  $T_{e,1} = 255 \text{ K}$  o albedo é de  $A_1 = 0.3$ . A pergunta pede qual a temperatura de emissão  $T_{e,2} = ?$  para um albedo de  $A_2 = 0.1$ .

Ou seja:

$$\frac{T_{e,2}^4}{T_{e,1}^4} = \frac{\sqrt[4]{\frac{1(1-A_2)S_0}{4\sigma}}}{\sqrt[4]{\frac{1(1-A_1)S_0}{4\sigma}}} = \sqrt[4]{\frac{(1-A_2)}{(1-A_1)}}$$

E podemos colocar à ordem da temperatura requerida:

$$T_{e,2} = T_{e,1} \sqrt[4]{\frac{(1-A_2)}{(1-A_1)}}$$

E agora podemos calcular:

$$T_{e,2} = 255\text{K} \sqrt[4]{\frac{(1-0.1)}{(1-0.3)}} = 272\text{K}$$



5

5.1

Antes de começar rever apontamentos das aulas T com cuidado.

Houve um decréscimo na temperatura média do planeta Terra. Ou seja, o balanço entre a potência de absorção e emissão foi alterado para diminuir a temperatura de emissão do planeta Terra. Neste caso, podemos admitir que o albedo da Terra aumentou, ou seja, mais radiação incidente sobre a terra foi reflectida antes de ser absorvida pela superfície da Terra (e uma pequena parte pela atmosfera). É difícil argumentar que o decréscimo da temperatura poderia dever-se, não ao aumento do albedo, mas sim à diminuição do efeito de estufa. Isso necessitaria de uma diminuição de gases de efeito de estufa significativa e cujo efeito se faria sentir durante mais do que dois anos. Portanto, é provável que a erupção do vulcão colocou partículas na atmosfera, que serviram para reflectir mais da radiação visível incidente sobre a terra.

5.2

Podemos utilizar a equação obtida nas perguntas anteriores que relaciona o albedo e a temperatura de emissão:

$$T_e = \sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A)}$$

Neste caso sabemos qual foi a variação da temperatura  $T_{e,1} - T_{e,2} = -0.5K$ . Embora a pergunta não o explicita, podemos assumir um albedo de antes da erupção de  $A_1 = 0.3$ .

Podemos escrever as expressões para as duas temperaturas de emissões em função do albedo:

$$T_{e,1} = \sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_1)}$$

$$T_{e,2} = \sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_2)}$$

A sua diferença é conhecida:

$$T_{e,1} - T_{e,2} = \Delta T = \sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_1)} - \sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_2)}$$

Arrumando a casa:

$$\Delta T = \sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_1)} - \sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_2)}$$

$$\Delta T = \sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}} \left\{ \sqrt[4]{(1 - A_1)} - \sqrt[4]{(1 - A_2)} \right\}$$

Por esta abordagem necessitamos de saber  $S_0$ .  $\sigma$  é uma constante. Não podemos seguir pelo caminho do rácio entre  $T_{e,1}$  e  $T_{e,2}$  porque só temos a diferença. Neste caso necessitamos de assumir que sabemos o valor de  $S_0 = 1366W/m^2$ .

Colocamos a expressão à ordem do albedo que queremos encontrar:

$$\Delta T - \sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_1)} = -\sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_2)}$$

$$\sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_1)} - \Delta T = \sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_2)}$$

$$\left(\sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_1)} - \Delta T\right)^4 = \frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_2)$$

$$\frac{4\sigma}{S_0} \left(\sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_1)} - \Delta T\right)^4 = 1 - A_2$$

$$A_2 = 1 - \frac{4\sigma}{S_0} \left(\sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - A_2)} - \Delta T\right)^4$$

E calculamos:

$$A_2 = 1 - \frac{4\sigma}{1366\text{W/m}^2} \left(\sqrt[4]{\frac{1366\text{W/m}^2}{4\sigma}(1 - 0.3)} - 0.5\text{K}\right)^4$$

$$A_2 = 0.3055$$

Ou seja, um aumento no albedo de  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{0.3055}{0.3} = 1.8\%$

6

Nas aulas teóricas temos a seguinte relação:

$$T_s = \left( \frac{2}{2 - \varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} T_e$$

Aplica-se quando temos uma atmosfera transparente à radiação incidente (visível) mas não para a radiação emitida pela superfície do planeta.

Sabemos que a absorção  $\alpha$  é igual à emissividade  $\varepsilon$ . Ou seja:

$$T_s = \left( \frac{2}{2 - \alpha} \right)^{\frac{1}{4}} T_e$$

Colocamos à ordem de absorção:

$$2 - 2 \left( \frac{T_e}{T_s} \right)^4 = \alpha$$

E podemos calcular para as duas condições:

$$T_e = 255\text{K}$$

$$T_s = 288\text{K}$$

$$\alpha = 2 - 2 \left( \frac{255\text{K}}{288\text{K}} \right)^4 = 0.77$$

$$T_e = 255\text{K}$$

$$T_s = 290\text{K}$$

$$\alpha = 2 - 2 \left( \frac{255\text{K}}{290\text{K}} \right)^4 = 0.80$$

O coeficiente de absorção teria de aumentar  $\frac{0.80}{0.77} = 4\%$